Algorytmy i metody optymalizacji

Optymalizacja bez ograniczeń

Projekt nr 1, Zestaw nr 24

Maciej Kłos

# Układ równań określających nasze położenie w układzie współrzędnych kartezjańskich

Układ geograficzny opiera się na trzech współrzędnych:  
 – promień wodzący  
 – długość geograficzna  
 – szerokość geograficzna

Aby przejść z tego układu na układ współrzędnych kartezjańskich należy skorzystać z następujących wzorów:

Z powyższych wzorów możemy określić położenie w układzie współrzędnych kartezjańskich każdego z 5 satelitów. Położenia te oznaczymy w następujący sposób:

Nasze położenie zostanie natomiast oznaczone następująco: . Wykorzystując te oznaczenia możemy ułożyć równanie które określa naszą odległość od każdego z satelitów:

Wykorzystując czasy nadejścia sygnałów i pamiętając o tym, że sygnały elektromagnetyczne poruszają się z prędkością światła , można ułożyć układ 5 równań:

# Zadanie optymalizacji

Zadanie optymalizacji bez ograniczeń wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów ma postać:

# Wyznaczenie położenia

Do znalezienia rozwiązania wykorzystano metodę optymalizacji bez ograniczeń z pakietu MATLAB Optimization Toolbox – lsqnonlin, realizującej metodę Levenberga‑Marquardta. Używając programu AMPL z solverem MINOS uzyskiwane rezultaty były bardzo zbliżone, więc do przyszłej analizy wykorzystywany będzie tylko pakiet MATLAB. Rozpoczynając algorytm z punktu startowego równego , gdzie – promień ziemi, uzyskano następujące położenie w współrzędnych kartezjańskich:

Przekształcając je na współrzędne w systemie geograficznym uzyskamy następujący wynik:

|  |  |
| --- | --- |
| Szerokość geograficzna: | 52.3217 |
| Długość geograficzna: | 21.6785 |
| Wysokość nad poziomem morza: | 159.0000 |

# Wpływ zmian parametrów na uzyskane rozwiązanie

## Wpływ punktu początkowego

Zadanie optymalizacji rozwiązano startując z 5 różnych punktów początkowych, rezultaty zapisane są w tabeli poniżej:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Punkt startowy | Szerokość geograficzna | Długość geograficzna | Wysokość nad poziomem morza | Błąd średniokwadratowy |
| (r, r, r) | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| (0, 0, 0) | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 6.8066e-12 |
| (1e7, 1e7, 1e7) | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 1.4436e-10 |
| (1e8, 1e8, 1e8) | 52.9177 | 20.5265 | 39798568.9888 | 10939071648.1104 |
| (1e9, 1e9, 1e9) | 52.9177 | 20.5265 | 39798568.9591 | 10939071648.0989 |

Jak widać do momentu przekroczenia wysokości satelitów uzyskiwane są bardzo zbliżone rezultaty, jednakże gdy przekroczymy tę granicę uzyskujemy zupełnie inny rezultat – metoda zbiega do innego minimum lokalnego.

## Wpływ dokładności w teście stop metody

Przetestowano uzyskane rozwiązanie startując z tego samego punktu początkowego: , gdzie  – promień ziemi, zmieniając maksymalną liczbę iteracji algorytmu. Wyniki przedstawiono poniżej:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Maksymalna liczba iteracji | Szerokość geograficzna | Długość geograficzna | Wysokość nad poziomem morza | Błąd średniokwadratowy |
| 400 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 4 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 3 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9975 | 0.0002 |
| 2 | 52.3201 | 21.6792 | -66.8167 | 248063.8478 |
| 1 | 51.5327 | 22.2083 | -94849.2543 | 45079998247.5122 |

Jak widać metoda Levenberga‑Marquardta charakteryzuje się bardzo szybką zbieżnością, już w czterech iteracjach znajduje poprawne rozwiązanie, ograniczenie do mniejszej liczby iteracji skutkuje otrzymaniem niewłaściwych rozwiązań.

Następnie przetestowano algorytm ze względu na maksymalną liczbę obliczeń funkcji celu:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Maksymalna liczba obliczeń funkcji celu | Szerokość geograficzna | Długość geograficzna | Wysokość nad poziomem morza | Błąd średniokwadratowy |
| 400 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 20 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 17 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9976 | 0.0002 |
| 10 | 51.5327 | 22.2083 | -94849.2544 | 45079998247.5122 |
| 5 | 37.5741 | 37.3842 | 159658.1272 | 500369986986.386 |

Jak widać znowu wystarcza niewielka liczba obliczeń funkcji celu, co świadczy o szybkiej zbieżności zastosowanego algorytmu.

Kolejnym krokiem było sprawdzenie parametru stopu ze względu na minimalną długość kroku algorytmu (StepTolerance):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Dopuszczalna długość kroku | Szerokość geograficzna | Długość geograficzna | Wysokość nad poziomem morza | Błąd średniokwadratowy |
| 1e-6 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 1e-5 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 1e-4 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9976 | 0.0002 |
| 1e-2 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9976 | 0.0002 |
| 1e-1 | 52.3201 | 21.6792 | -66.8167 | 248063.8478 |
| 1 | 37.5741 | 37.3842 | 159658.1272 | 500369986986.386 |

Przy wartości 1e-4 następuje pogorszenie jakości rozwiązania, jednakże całkowicie błędne wyniki pojawiają się przy wartości 1e-1.

Ostatnim analizowanym parametrem jest minimalna poprawa w funkcji jakości (FunctionTolerance):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Dopuszczalna długość kroku | Szerokość geograficzna | Długość geograficzna | Wysokość nad poziomem morza | Błąd średniokwadratowy |
| 1e-6 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 1e-5 | 52.3217 | 21.6785 | 159.0000 | 9.7755e-13 |
| 1e-4 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9976 | 0.0002 |
| 1e-2 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9976 | 0.0002 |
| 1e-1 | 52.3201 | 21.6792 | -66.8167 | 248063.8478 |
| 1 | 37.5741 | 37.3842 | 159658.1272 | 500369986986.386 |

Jak widać wyniki są identyczne jak w przypadku poprzedniego parametru.

## Wpływ zaburzeń danych

Aby zbadać wpływ zaburzeń danych do każdej z podanych współrzędnych i czasów dodawane było pewne stałe zakłócenie, generowane losowo co do modułu mniejsze bądź równe podanym wartościom:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Maksymalne zakłócenie | Szerokość geograficzna | Długość geograficzna | Wysokość nad poziomem morza | Błąd średniokwadratowy |
| 1e-12 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9998 | 1.0028e-08 |
| 1e-10 | 52.3217 | 21.6785 | 158.9809 | 1.4065e-05 |
| 1e-8 | 52.3218 | 21.6785 | 157.0946 | 0.6353 |
| 1e-6 | 52.3200 | 21.6794 | 44.5136 | 10999.8347 |
| 1e-4 | 52.3647 | 21.4015 | -9194.1504 | 88952174.8509 |
| 1e-2 | 75.8876 | 49.3781 | 2776097.6101 | 2817562891236.28 |
| 1e-1 | 22.5917 | -55.1393 | 34146977.5205 | 192439636308372 |

Jak widać nawet niewielkie zakłócenia znacząco wpływają na jakość uzyskanego rozwiązania co świadczy o dużej dokładności urządzeń które odpowiadają za system pozycjonowania.

# Znalezione położenie

Wyznaczone położenie znajduje się we wsi Dobre, położonej w województwie mazowieckim, w powiecie mińskim.

